

# ВАРІАЦІЙНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ВІЛЬНОЇ РЕЛЯТИВІСЬКОЇ ДЗИГИ

*Роман МАЦЮК*

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 36, Львів 79060  
e-mail: matsyuk@lms.lviv.ua, romko.b.m@gmail.com

Редакція отримала статтю 11 листопада 2005 р.

Показуємо, що добре знані рівняння руху першого порядку (за спіном, імпульсом та координатою) для релятивістської дзиги є рівнозначними до рівнянь третього порядку Матісона усюди на поверхні додаткової в'язі Матісона-Пірані. Опісля розглядаємо ці рівняння третього порядку в пласкому просторі-часі та й винаходимо функцію Лягранжа для них. Коли дозволити фізичну інтерпретацію усієї множини екстремалей, то як наслідок відкриємо цілий спектр власної маси релятивістської дзиги, параметризований значеннями власного моменту.

## 1 Вступ

Поведінку крутької буцім-класичної частки, наділеної скісним тензором  $S^{ij} = S^{[ij]}$ , можна описати відомою системою рівнянь (гляди, наприклад, [1])

$$\dot{P}^i = -\frac{1}{2}R_{jkl}^i u^j S^{kl} \quad (1)$$

$$\dot{S}^{ij} = P^i u^j - P^j u^i. \quad (2)$$

Цих рівнянь недосить для знаходження світової лінії частки. Тому їх доповнюють різними додатковими умовами. Часто послуговуються умовою Тульчієва

$$P_j S^{ij} = 0. \quad (3)$$

Ми ж використовуватимемо умову Матісона-Пірані

$$u_j S^{ij} = 0. \quad (4)$$

Різницю між умовами (3) і (4) трактуємо як різницю між способами встановлення залежності поміж змінними  $\mathbf{P}$  та  $\mathbf{u}$ . Перехід від швидкості до імпульсу можна оцінювати як впровадження фазового простору. У варіаційному численні такий перехід називають (узагальненим) перетворенням Лежандра. Ми виконаємо цю програму в пласкому просторі-часі. Додаткова умова Матісона-Пірані дозволить доволі швидко перейти до варіаційної форми рівняння світової лінії частки. Відповідна функція Лягранжа задасть шукане перетворення Лежандра. Правда, на цій дорозі підвищиться порядок похідних у варіаційному рівнянні. Таким чином, йде мова про формалізм механіки Остроградського.

Факт підвищення порядку похідних у рівнянні, яке описує динаміку просторових координат релятивістської дзиги, зібрав наголошений ще у 1945<sup>му</sup> році Вайсенгофом [2] у його поклику на статтю Матісона [3]. Матісон, додатково послуговуючись в'яззю (4), отримав для світової лінії дзиги в гравітаційному полі таке рівняння:

$$m\dot{u}^i = \ddot{u}_j S^{ij} - \frac{1}{2} R_{jkl}^i u^j S^{kl}. \quad (5)$$

Побутує думка, що рівняння (5) не є рівнозначне до системи рівнянь (1, 2). Ми покажемо, що рівнозначність зберігається усюди на поверхні (4).

Повертаючись до вільної дзиги, ми запропонуємо варіаційне *узагальнення* рівняння третього порядку (5), яке дозволить „розморозити“ значення „0“ інтеграла руху (в пласкому просторі)

$$\frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (6)$$

де значком  $\mathbf{s}$  позначений деякий чотири-вектор „спіну“ (вертуна). Тільки в цьому „розмороженні“ і полягатиме нерівнозначність між *узагальненим* рівнянням руху вільної дзиги (26) і системою (1, 2, 4) без гравітації. Наша тактика полягає в тім, щоби, отримавши в пласкому просторі *варіаційне* рівняння третього порядку (26), яке містить усі розв'язки системи рівнянь (5, 2, 4) при  $R_{jkl}^i = 0$ , і яке ми власне називаємо *узагальненим*, відважитись розглядати і всі решта розв'язків такого *узагальненого* рівняння. Виявляється, що ця решта розв'язків *не виходить за межі неперервного спектру інтеграла руху* (6). Цієї властивості не добитись, просто відкидаючи умову (4) і залишаючись при рівнянні (5). Можна сказати, що „розмороження“ інтеграла (6) є рівнозначним до варіаційної модифікації рівняння (5). При цьому виявляється, що *уся множина розв'язків узагальненого рівняння складається з таких і тільки з таких світових ліній, яких можна інтерпретувати як рухи крутьких часток з деякою позірною масою*

$$m = \mu \left( 1 - \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u})^2}{s^2 u^2} \right)^{3/2}. \quad (7)$$

Частки з масою  $m \neq \mu$  рухаються так, щоби чотири-вектор „спіну“  $\mathbf{s}$ , завдяки інтегралові руху (6), утворював постійний кут з напрямом чотири-швидкості.

## 2 Рівняння Матісона

Розглянемо деякі рівнозначні перетворення системи рівнянь (1, 2, 4).

**Твердження.** В області  $\mathbf{u}^2 \neq 0$  рівняння (2) алгебрично рівнозначне таким двом:

$$\mathbf{u}^2 P^i - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) u^i = u_j \dot{S}^{ij} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{ijkl} u^j \dot{S}^{kl} = 0. \quad (9)$$

**Доведення.** Щоби переконатись в імплікації (8, 9)  $\Rightarrow$  (2), потрібно домножити рівняння (9) зовнішнім чином справа на вектор  $\mathbf{u}$ , перейти до двоїстого рівняння і відняти від цього подвоєний зовнішній добуток рівняння (8) на вектор  $\mathbf{u}$  (комбінація  $\frac{1}{2} e^{ijkl} u_l (9)_k - 2u^{[j} (8)^{i]}_k$  дає рівняння (2) $^{ij}$ , де  $e^{ijkl} = \delta_{0123}^{ijkl}$  – одиничний повністю скісний (антисиметричний) контраваріантний псевдотензор Леві-Чивіті). ■

Виходить, замість системи рівнянь (1, 2) можна розглядати систему (1, 8, 9).

Пустимо тепер в хід в'язь (4) разом з її диференційним продовженням,

$$u_j \dot{S}^{ij} = S^{ji} \dot{u}_j. \quad (10)$$

Саме рівність (10) дозволяє запровадити інтеграл руху

$$m = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \quad (11)$$

оскільки алгебричним наслідком рівнянь (1, 8, 10) є наступна рівність, яка у своїй лівій частині пропорційна до упохідненої правої частини виразу (11):

$$\mathbf{u}^2 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u})^\cdot - \frac{1}{2} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u}^2)^\cdot = 0. \quad (12)$$

Диференційна умова Матісона-Пірані (10) є вирішальною для можливості повністю усунути члени, які містять похідну від тензора спіну і неявно є присутні у лівій частині рівняння (1). З урахуванням умови (10) означення імпульсу (8) прибере форми:

$$\mathbf{u}^2 P^i - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) u^i = \dot{u}_j S^{ji}, \quad (13)$$

з її алгебричним наслідком

$$\mathbf{u}^2 (\mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{u}}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}). \quad (14)$$

Справедливим, отже, є таке

**Твердження.** На многовиді (10) при  $\mathbf{u}^2 \neq 0$  рівняння (2) алгебрично рівнозначне як зі системою рівнянь (8, 9), так і зі системою рівнянь (13, 9).

Наступним кроком вилучім змінну величину  $\mathbf{P}$  із системи рівнянь (1, 10, 9, 13). З цією метою вдамося до першого диференційного продовження рівняння (13):

$$P^i (\mathbf{u}^2)^\cdot + \mathbf{u}^2 \dot{P}^i - (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \dot{u}^i - u^i (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u})^\cdot = S^{ji} \ddot{u}_j + \dot{u}_j \dot{S}^{ji}. \quad (15)$$

Замість рівняння (1) розгляньмо таке:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{u}^2) \cdot [(\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) u^i - 3 S^{ij} \dot{u}_j] - \mathbf{u}^2 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}) \dot{u}^i + \mathbf{u}^2 S^{ij} \ddot{u}_j = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^2)^2 R_{jkl}^i u^j S^{kl}. \quad (16)$$

**Твердження.** В області  $\mathbf{u}^2 \neq 0$  на многовиді (10) система рівнянь (1, 2, 15) алгебрично рівнозначна зі системою (16, 9, 13, 15, 12).

**Доведення.** Щоби переконатись у справедливості імплікації (1, 2, 15)  $\Rightarrow$  (16, 9, 13, 15, 12), підставимо вираз для похідної  $\dot{S}^{ij}$  з рівняння (2) у рівняння (15) і домножимо усе на  $\mathbf{u}^2$ . Далі нагадаємо, що алгебричним наслідком системи (1, 8, 10) є рівняння (12) і (13). Тому використаємо (12) і, замінивши вираз  $\mathbf{u}^2 \mathbf{P}$  з рівняння (13), а вираз для  $\dot{\mathbf{P}}$  з рівняння (1), одержимо рівняння (16).

Щоби переконатися у справедливості зворотньої імплікації, від рівняння (16) віднімемо рівняння (15) з коефіцієнтом  $\mathbf{u}^2$ . За допомоги співвідношення (10) вилучимо доданок  $-3 \dot{u}_j S^{ij}$ , а опісля, ґрунтуючись на попередньому Твердженні, замінимо похідну  $\dot{S}^{ij}$  з рівняння (2). Далі скористаємо з наслідка (14). Врешті, застосувавши (12), відразу отримаємо рівняння (1). ■

Зауважимо, що до цього часу ми ще не користали з додаткової умови Матісона-Пірані (4), а тільки з її диференційного продовження (10). Так само, як і не вибирали іще конкретного значення інтеграла руху  $\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$  формулою (11).

Коли привести рівняння (16) до натурального параметра та закріпити значення величини маси формулою (11), тоді воно співпадає з рівнянням третього порядку (5) для поступального руху буцім-клясичної крутької частки, яке можна вчитати зі статті Матісона [3].

В системі рівнянь (16, 9, 13, 12) формула (13) просто дає означення імпульса, тому її можна опустити з точки зору пошуку розв'язків.

Кількість рівнянь у системі (16, 9, 4, 10) можна значно зменшити, запровадивши чотири-векторну величину „вертуна“ (або буцім-спіна)

$$s_i = \frac{\sqrt{|g|}}{2\|\mathbf{u}\|} \varepsilon_{ijkl} u^j S^{kl}. \quad (17)$$

Умова Матісона-Пірані (4) дозволяє обернути формулу (17):

$$S_{ij} = \frac{\sqrt{|g|}}{\|\mathbf{u}\|} \varepsilon_{ijkl} u^k s^l. \quad (18)$$

Тепер ми готові подати систему рівнянь Діксона-Матісона (1, 2, 4) на закріпленій формулою (11) масовій оболонці в іншому рівнозначному вигляді, куди входитимуть похідні від координат частки до третього порядку включно. Еквівалентність порушиться тільки в тім випадку, коли ми забудемо про вихідну умову Матісона-Пірані (4). Роз-

гляньмо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijkl}\ddot{u}^j u^k s^l - 3 \frac{\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}^2} \varepsilon_{ijkl} \dot{u}^j u^k s^l + \frac{m}{\sqrt{|g|}} [(\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}) u_i - \mathbf{u}^2 \dot{u}_i] \\ = \frac{\mathbf{u}^2}{2} R_{ij}{}^{mn} \varepsilon_{mnkl} u^j u^k s^l \end{aligned} \quad (19)$$

$$u^2 \dot{\mathbf{s}} + (\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{u} = 0. \quad (20)$$

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (21)$$

**Твердження.** В області  $\mathbf{u}^2 \neq 0$  система рівнянь (19, 20, 21, 18, (18)<sup>\*</sup>) алгебрично рівнозначна системі (16, 9, 4, 11, 17, (17)<sup>\*</sup>).

**Доведення.** З метою отримати рівняння (18), домножимо означення (17) зовнішнім чином на вектор  $\mathbf{u}$ , перейдемо до двоїстого рівняння і використаємо умову Матісона-Пірані (4). Навпаки, домноживши (18) зовнішнім чином на вектор  $\mathbf{u}$  і перейшовши до двоїстого рівняння, одержимо, з використанням умови (21), рівняння (17).

Рівняння (19) і (16) рівнозначні з огляду на (18).

Рівняння (9) записуємо у вигляді

$$\left( \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijkl} u^j S^{kl} \right)^{\cdot} - \frac{\sqrt{|g|}}{g} e^{ijkl} \dot{u}_j S_{kl} = 0,$$

де  $\frac{(\sqrt{|g|})^2}{g} = -1$ . У перший доданок підставляємо формулу (17), а у другий доданок – формулу (18) і одержуємо подвоєне рівняння (20).

Зворотній шлях довший. Спочатку домножуємо (20) зовнішнім чином на вектор  $2\mathbf{u}$  і переходимо до двоїстого рівняння

$$\mathbf{u}^2 \left( \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijkl} u^k s^l \right)^{\cdot} - \mathbf{u}^2 \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijkl} \dot{u}^k s^l = 0.$$

У перший доданок підставляємо формулу (18), а у другий доданок – формулу (17). Одержимо:

$$\|\mathbf{u}\|^3 \dot{S}_{ij} + \|\mathbf{u}\| \left( u_j S_{ik} \dot{u}^k - u_i S_{jk} \dot{u}^k \right) = 0.$$

Знову домножуючи зовнішнім чином на вектор  $\frac{2}{|g|} \mathbf{u}$  і перейшовши до двоїстого виразу, отримаємо (9). ■

Замість рівняння (20) в систему (19, 20, 21) можна вписати таке:

$$\dot{\mathbf{s}} = \frac{\sqrt{|g|}}{2m \mathbf{u}^2} \varepsilon_{mnkl} R_{ij}{}^{mn} u^j u^k s^l s^i \mathbf{u}. \quad (22)$$

У справедливості вказаної заміни переконаємось, згорнувши рівняння (19) з вектором  $\mathbf{s}$  і використавши (21).

В пласкому просторі-часі вертун  $\mathbf{s}$  зберігається весь, як бачимо з рівняння (22).

### 3 Варіаційне узагальнення рівнянь Матісона без гравітації

Зробімо деякі алгебричні перетворення над рівнянням (19). Для спрощення запису використовуватимемо загальноприйняті позначення скісної векторної алгебри, а також позначимо праву частину рівняння (19) літерою  $\mathbf{F}$ . Згортка рівняння (19) з чотири-вектором  $\mathbf{s}$  одразу приводить до співвідношення

$$m (\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}) \cdot (\dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u}) = - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}), \quad (23)$$

де під величиною  $(\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}) \cdot (\dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u})$  розуміємо скалярний добуток бівекторів,

$$(\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}) \cdot (\dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{u}^2 (\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}}) - (\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}).$$

Оперуючи співвідношенням (23), легко переконатися у справедливості ще й такого співвідношення, незалежно від умови (21):

$$\frac{(\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}})}{\mathbf{u}^2} = \frac{(\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{u}})}{(\mathbf{s} \wedge \mathbf{u})^2} - \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u}^2 (\mathbf{s} \wedge \mathbf{u})^2} \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{s})}{m}. \quad (24)$$

Поділімо тепер рівняння (19) на величину  $\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^3$  та скористаймо з наслідку (24). Одержимо таке

**Твердження.** На поверхні (21) рівняння (19) є алгебрично рівнозначним до такого:

$$\frac{\varepsilon_{ijkl} \ddot{u}^j u^k s^l}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^3} - 3 \frac{(\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{u}})}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^5} \varepsilon_{ijkl} \dot{u}^j u^k s^l - \frac{m}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^3} (\mathbf{u}^2 \dot{u}_i - (\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}) u_i) = \frac{F_i}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^3} \quad (25)$$

Розглянемо рівняння (25) при відсутності гравітації. Знаком „ $*$ “ позначимо операцію переходу до двоїстого тензора.

**Твердження.** Рівняння

$$\frac{* \ddot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^3} - 3 \frac{(\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{s} \wedge \dot{\mathbf{u}})}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^5} * \dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{s} + \frac{\mu}{\|\mathbf{s}\|^3 \|\mathbf{u}\|^3} (\mathbf{u}^2 \dot{\mathbf{u}} - (\mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{u}}) \mathbf{u}) = 0 \quad (26)$$

при постійних  $\mu$  та  $\mathbf{s}$  має варіаційне походження. Воно описує рух вільної буцім-клясичної дзиги з масою (7). Величина (6) є першим його інтегралом.

Рівняння (26) можна отримати від кожної з цілого сімейства функцій Лягранжа. Нехай  $\{\mathbf{e}_{(k)}\}_{k=\overline{0,3}}$  значить псевдоортонормовану базу в плоскому просторі-часі. Нехай

$$L_{(k)} = \frac{* \dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{s} \wedge \mathbf{e}_{(k)}}{(u_k \mathbf{s} - s_k \mathbf{u})^2 - (\mathbf{s} \wedge \mathbf{u})^2} (\mathbf{s}^2 u_k + (\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}) s_k), \quad k = \overline{0, 3}. \quad (27)$$

Кожна з функцій Лягранжа

$$\frac{\mu}{\|\mathbf{s}\|^3} \|\mathbf{u}\| + \frac{L_{(k)}}{\|\mathbf{s}\|^2 \|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|} \quad (28)$$

породжує рівняння (26) (з постійним чотири-вектором  $\mathbf{s}$ , який не підлягає варіації).

Ми не знаємо, чи існують Лоренц-інваріантні та глобально означені функції Лягранжа для рівняння (26). Вираз у лівій частині рівняння (26) теж не є інваріантом. Саме рівняння (26), однак, наділене лоренцівською симетрією в тому розумінні, яке прийняте у теорії диференціальних рівнянь. Це забезпечується векторним характером лівої частини рівняння (26). Якщо

$$X = \Omega^{kl} u_k \frac{\partial}{\partial u^l} + \Omega^{kl} \dot{u}_k \frac{\partial}{\partial \dot{u}^l} + \Omega^{kl} \ddot{u}_k \frac{\partial}{\partial \ddot{u}^l} + \Omega^{kl} s_k \frac{\partial}{\partial s^l}$$

є генератором псевдоортогональних перетворень, а  $\mathbf{v}$  – довільний вектор, тоді

$$X v^i = -\eta^{ij} \Omega_{jk} v^k,$$

де  $\eta^{ij}$  – це є постійна діагональна матриця канонічної контраваріантної метрики псевдоевклідовського простору. В застосуванні до рівняння (26) бачимо, що множина світових ліній – розв'язків рівняння (26) не змінюється під дією лоренцівських перетворень. При цій нагоді згадаємо, що лоренц-інваріантних варіаційних рівнянь третього порядку, які б не містили жодних сторонніх векторних чи тензорних параметрів, не існує зовсім [4].

Пригадавши означення варіаційного імпульсу,  $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}\right)^{\cdot}$  та вираз для рівняння Ойлера-Пуасона,  $-\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}\right)^{\cdot} + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}\right)^{\ddot{\cdot}} = 0$ , можемо з рівняння (26) легко узріти вираз для кількості руху частки (вибір знаку регулюється знаками доданків у формулі (28)):

$$-\mathbf{p} = \frac{* \dot{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{u} \wedge \mathbf{s}}{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^3} + \frac{\mu}{\|\mathbf{s}\|^3 \|\mathbf{u}\|} \mathbf{u}. \quad (29)$$

Порівняємо поміж собою вирази для кількості руху (29) і (13), скориставши з означення (18) для величини  $S_{ij}$ . Узгодивши масу частки співвідношенням (7) та використовуючи означення (11), одержимо:

$$\mathbf{P} = -\frac{\|\mathbf{s} \wedge \mathbf{u}\|^3}{\|\mathbf{u}\|^3} \mathbf{p}.$$

Множник пропорційності є сталим в пласкому просторі-часі з огляду на збереження інтегралу руху (6) і постійність 4-вектора  $\mathbf{s}$ .

*Зауваження.* В одній з попередніх робіт [6] ми вказали на спосіб отримати рівняння (26) із загальної засади варіаційності в поєднанні з вимогою лоренцівської симетрії.

## 4 Тривимірний плаский простір-час

Система рівнянь (19, 20, 21) при відсутності гравітації допускає рух у площині, коли  $u^3 = \dot{u}^3 = \ddot{u}^3 = 0$ . У три-вимірному пласкому просторі-часі рівняння (19) прибере форми (гляди [5]):

$$s^3 \left( \frac{\ddot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} - 3 \frac{\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^5} \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u} \right) + \frac{m}{\|\mathbf{u}\|^3} (\mathbf{u}^2 \dot{\mathbf{u}} - (\dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}) = 0. \quad (30)$$

В роботах [4] і [7] доведено, що рівняння (30) з довільними постійними параметрами  $s^3 = \eta^{33}s_3$  та  $m$  – це єдине релятивіське рівняння третього порядку, яке ще може мати варіаційне походження. Відомі нам функції Лягранжа для рівняння (30), як і в попередньому випадку, утворюють ціле сімейство, параметризоване вибором псевдоевклідовської 3-бази  $\{\mathbf{e}_{(k)}\}_{k=\overline{0,2}}$  в просторі-часі:

$$L_{(k)} = s^3 \frac{u^k [\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \mathbf{e}_{(k)}]}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{u} \times \mathbf{e}_{(k)}\|^2} + m \|\mathbf{u}\|, \quad k = \overline{0, 2}.$$

Якщо компоненти  $s^1$  і  $s^2$  відсутні, то з формули (21) видно, що і  $s^0 = 0$ , так що  $\|\mathbf{s}\| = s^3$ . Вираз для величини кількості руху частки і в цьому випадку добре проглядається у лівій частині рівняння (30) (гляди ще [5]). Він співпадає із тим виразом, який пізніше розглядався в роботі [8]:

$$-\mathbf{p} = \frac{\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^3} + \frac{m}{\|\mathbf{s}\|} \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

## Письменá

- [1] Dixon, W. G. The definition of multipole moments for extended bodies. GRG, 1973, vol. 4, no. 3, 199–209. 206
- [2] Weyssenhoff, J. and Raabe, A. Relativistic dynamics of spin-fluids and spinparticles. Acta Phys. Polon., 1947, vol. 9, fasc. 1, 7–18. 207
- [3] Mathisson, Myron. Neue Mechanik materieller Systeme. Acta Phys. Polon., 1937, vol. 6, fasc. 3, 163–200. 207, 209
- [4] Мацюк, Р. Пуанкаре-инвариантные уравнения движения в лагранжевой механике с высшими производными. дис... к-та физ.мат. наук. Львов, 1984. 140 с. 212, 213
- [5] Мацюк, Р. Лагранжев анализ инвариантных уравнений движения третьего порядка в релятивистской механике классических частиц. ДАН СССР, 1985, том 282, № 4, 841–844 [MR0802859(87d:70028)]. 213



- [6] Мацюк, Р. Буцім-гамільтонівський опис класичного спіну. Фізичний збірник НТШ, 2001, том 4, 226–233. **212**
- [7] Matsyuk, R. Third-order relativistic dynamics: classical spinning particle travelling in a plain. *Condensed Matter Phys.*, 1998, vol. 1, no. 3(15), 453–462. [arXiv:1304.7494v1](#). **213**
- [8] Plyushchay, M. S. Relativistic massive particle with higher curvatures as a model for the description of bosons and fermions. *Phys. Lett. B*, 1990, vol. 235, no. 1, 47–51. **213**

## VARIATIONAL GENERALIZATION OF FREE RELATIVISTIC TOP

*Roman MATSYUK*

Pidstryhach Institute for Applied Problems  
in Mechanics and Mathematics,  
Ukrainian National Academy of Sciences,  
3-b Naukova Str., Lviv 79060

We prove that well known first-order (in spin, momentum, and space-time coordinates) equations of motion of relativistic top are equivalent to the third-order equations of Mathisson on the surface of the Mathisson-Pirani auxiliary constraint. We then consider these third-order equations in flat space-time with constant spin 4-vector and invent a Lagrange function for them. Allowing physical interpretation to be applied to the complete set of extremals yields a whole spectrum of spin-dependent effective “proper mass” of the relativistic top.